Klasse B12T5
1. Schulaufgabe aus der Mathematik am 27.11.2009

Analysis

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}kx + 2$; $k \in \mathbb{R}$
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{fk} bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k der Graph G_{fk} Stellen mit horizontaler Tangente besitzt. Geben Sie an, welche besonderen Punkte an diesen Stellen vorliegen. [6]

1.2 Berechnen Sie die Gleichung $t_k(x)$ der Tangente an den Graphen G_{fk} an der Stelle $x_0 = 3$ in Abhängigkeit von k. Beschreiben Sie die Geradenschar, die diese Tangenten bilden. [5]
(Zwerg: $t_k(x) = \frac{1}{2}kx + \frac{9}{2}x - 11{,}5$)

1.3 Der Punkt B(0|2) ist offensichtlich gemeinsamer Punkt aller Graphen G_{fk}. Folglich bilden die Tangenten an der Stelle $x_1 = 0$ ein Geradenbüschel durch den Büschelpunkt B(0|2). Berechnen Sie die zweite Stelle x_2 ($x_2 \neq x_1$), für die dieser Punkt B(0|2) Büschelpunkt der Tangentenschar an den Graphen G_{fk} ist. [6]

2.0 Ab nun sei **k = 0** und $f_0(x) = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

2.1 Ermitteln Sie Monotonieverhalten sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. [6]

2.2 Bestimmen Sie die Linearfaktor-Zerlegung des Funktionsterms von f. [5]

2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse G_f für $-1 \leq x \leq 3$ sowie den Graphen der in Aufgabe 1.2 berechneten Tangente in das vorhandene Koordinatensystem. (1LE = 2cm) [5]

3.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen $h : x \mapsto h(x)$ mit $h(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ mit $D_h = \mathbb{R}$

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von h mit G_f. [5]

Analytische Geometrie

4 Untersuchen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Gauß, wie viele Lösungen das Gleichungssystem in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ besitzt. [6]

$$\begin{aligned} x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= 4a \\ 2x_1 + (1+2a)x_2 + 5ax_3 &= 6a + 6 \end{aligned}$$

5 Bestimmen Sie, für welche Werte von $k \in \mathbb{R}_0^-$ das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt, und geben Sie ggf. die Lösung an. [5]

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ kx_3 &= 9 \\ x_3 &= k \end{aligned}$$